L.7.11 Sahline | A.S :2006/2007

Devoir de synthèse N°3

Classes $4^{ème}T_1$

Durée : 3.h

Exercice N°1: (5pts)

L'espace ξ étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1/ Soient A(1 , 2 , 0) et B(5 , -2 , 2) deux points de ξ

Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble E des points $M(x, y, z) \in \xi$ tel que $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$

2/ Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z) \in \xi$ tel que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z + 1 = 0$$

Montrer que S est la sphère de centre I(3 , 0 , 1) et de rayon R = 3

3/ Soit $m \in IR_+$

Considérons les plans $P_m : x + (1 + m)\,y + m\sqrt{10}\,z - 3 = 0$

a) Caractériser l'ensemble $P_m \cap S$ suivant les valeurs de m

b) Montrer que $P_0 \cap S$ est le cercle de centre I et de diamètre [AB].

Exercice N°2 (5 points)

Une urne contient 4 boules blanches numérotées 1,1,1,0 et deux boules rouges numérotées 1,0

1/ une épreuve consiste à tirer simultanément trois boules de l'urne

a) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants
   A « avoir trois boules blanches »
   B « le produit des numéros inscrits sur les boules tirées est égale à zéro »

b) On désigne par X l'aléas numérique qui prend pour valeur le nombre de boules rouges restants dans l'urne
   Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique

2/ On répète l'épreuve précédente quatre fois de suite en remettant après chaque épreuve les boules tirées dans l'urne
déterminer la probabilité pour que l'évènement A soit réaliser pour la première fois aux deuxième tirage

3/ On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne . On désigne par « a » le numéro inscrit sur la première boule tirée et par « b » le numéro inscrit sur la deuxième boule tirée
A chaque couple (a,b) on associe le nombre complexe Z=a+ib
Soit Y la variable aléatoire qui à chaque couple (a,b) associe $|Z|^2$
Déterminer la loi de probabilité de Y

Problème : (10 pts)

I- Soit g la fonction définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par : $g(x)=\text{Log}(x+1)-\text{Log}x-\dfrac{1}{x+1}$

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

2/a) Montrer que : $g'(x)=\dfrac{-1}{x(x+1)^2}$ $\forall x>0$ puis dresser le tableau de variation de g

b) En déduire que $\forall x\in\left]0,+\infty\right[$ on a : $g(x)>0$

II- Soit f la fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x\text{Log}(x+1)-x\text{Log}x & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

On désigne par ζ_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$; $\left\|\vec{i}\right\|=4\text{cm}$

1/a) Montrer que f est continue à droite en 0

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0

2/ Montrer que $\forall x>0 : f(x)=\dfrac{\text{Log}(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$; en déduire que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$

3/a) Montrer que pour tout $x>0$ on a : $f'(x)=g(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f

4 / Soit la droite $D: y=x$. Etudier la position relative de ζ_f par rapport à D

5/ Tracer D et ζ_f

6/a) Montrer que $\displaystyle\int_1^2 x\text{Log}(x+1)dx=\frac{3}{2}\text{Log}3-\frac{1}{4}$ (Remarquer que : $\dfrac{x^2}{x+1}=x-1+\dfrac{1}{x+1}$)

c) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations respectives : x =1, x = 2 , y = 0 et la courbe ζ_f

III- Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par: $U_0=\dfrac{1}{4}$ et $U_{n+1}=f(U_n)$

1/ Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$: $0\le U_n\le\dfrac{1}{e-1}$

2/ Montrer que la suite U est croissante

3/ En déduire que U est convergente et calculer sa limite